

Modelado y simulación de un robot de cuatro grados de libertad

Modeling and simulation of a robot with four degrees of freedom

Edson Gastón Montaña Bautista 1. Edgar Roberto Ramos Silvestre 2.

1 Ingeniero Mecánico y de Automatización Industrial. Coordinador del Departamento Académico de Electromecánica, Universidad Privada del Valle

mbautistaedson@gmail.com

2 Ingeniero Electrónico. Maestría en Tecnología de Computo (CIDETEC-IPN, México D.F.). Director del Departamento de Electrónica y Telecomunicaciones, Universidad Privada del Valle

eramoss@univalle.edu

RESUMEN

El presente documento muestra paso a paso el procedimiento que se debe seguir para obtener el modelo dinámico de un robot de cuatro grados de libertad. Esto se logró con la ayuda de una herramienta matemática muy importante: las Ecuaciones de Movimiento de Lagrange. Una vez obtenidas las ecuaciones que gobiernan el movimiento del robot, se realizaron las simulaciones del modelo matemático obtenido con ayuda del software Matlab-Simulink; así mismo, se obtuvieron las gráficas de la trayectoria del extremo del robot para diversos torques aplicados a cada una de sus articulaciones. El diseño CAD del robot se realizó utilizando el software SolidWorks, esto para obtener las propiedades físicas de los eslabones como masas, centros de masa y momentos de inercia.

Palabras clave: Modelado matemático. Simulación. Robot de cuatro grados de libertad. Robótica.

ABSTRACT

This document shows step by step the procedure to find the dynamic model of a robot with four degrees of freedom; this was achieved with the help of an important mathematical tool: The Lagrange equations of motion. After finding the

equations that govern the motion of the robot, the simulations of the obtained mathematical model were performed by using the Matlab-Simulink software, all this to graph the trajectory of the last robot link introducing different input parameters (torque) to the joints. The CAD design of the robot were performed by using the SolidWorks software, this to find the physical properties of the robot links like mass, center of mass and moments of inertia.

Keywords: Mathematical modeling. Simulation. Robot with four degrees of freedom. Robotics.

INTRODUCCIÓN

Los robots manipuladores son sistemas mecánicos articulados formados por eslabones conectados entre sí a través de uniones y articulaciones (las cuales son básicamente de dos tipos: rotacionales y traslacionales). Cada una se controla independientemente a través de un accionador, que es ubicado generalmente en dicha unión, y el movimiento de las uniones produce el movimiento relativo de los eslabones.

Por otro lado, también resulta de gran interés (sobre todo desde un punto de vista práctico) la determinación de la posición y orientación del dispositivo terminal del robot, puesto que este

dispositivo terminal realiza la tarea encomendada (tal como abrir o cerrar una garra, aplicar una soldadura, etc.). Dicho estado se expresa en términos del marco de referencia coordinado cartesiano (x,y,z) situado generalmente en la base del robot.

El modelo cinemático directo consiste en hallar un modelo matemático de las coordenadas cartesianas (x,y,z) y que estas estén en función de las coordenadas articulares $(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n)$. Su obtención es metódica (aunque laboriosa) y en el caso de robots con escaso grado de libertad involucra sencillas expresiones trigonométricas. El modelo cinemático inverso consiste justamente en la relación inversa del modelo cinemático directo: hallar una relación matemática de las coordenadas articulares $(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n)$ y que estas estén en función de las coordenadas cartesianas (x,y,z) .

Las ecuaciones dinámicas de un robot manipulador pueden obtenerse a partir de las ecuaciones de movimiento de Newton. El inconveniente que presenta este método es que el análisis se complica notablemente cuando aumenta el número de articulaciones del robot. En estos casos, es conveniente emplear las ecuaciones de movimiento de Lagrange (Kelly y Victor, 2003).

Obtener el modelo dinámico es muy importante, debido a que los manipuladores robóticos de hoy requieren de este modelo para poder aplicarles diversas leyes de control, dependiendo de la tarea a realizar.

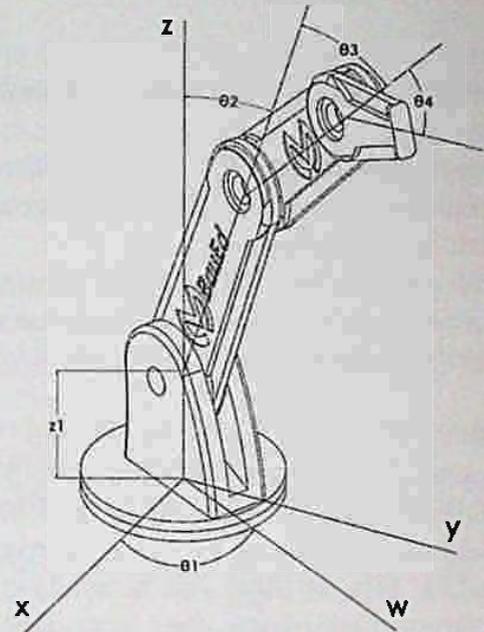
DESARROLLO

El procedimiento que se debe adoptar es el siguiente: primero considerar el estudio de la orientación y disposición de cada uno de los eslabones y luego determinar matemáticamente el comportamiento de cada uno (en especial el del efector final). A continuación, se describe todo este procedimiento.

Modelo dinámico

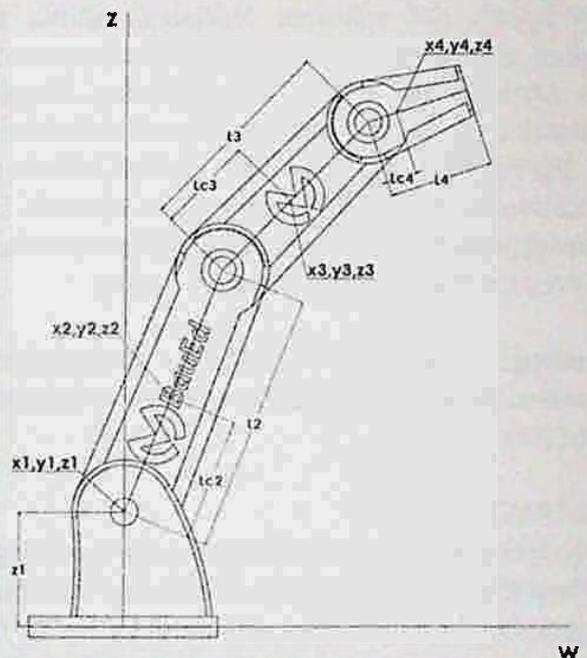
El modelo dinámico del robot se desarrolla teniendo como referencia la disposición de los eslabones que se muestran en la figura N°1.

Figura N°1. Vista del robot MBauEd en tres dimensiones



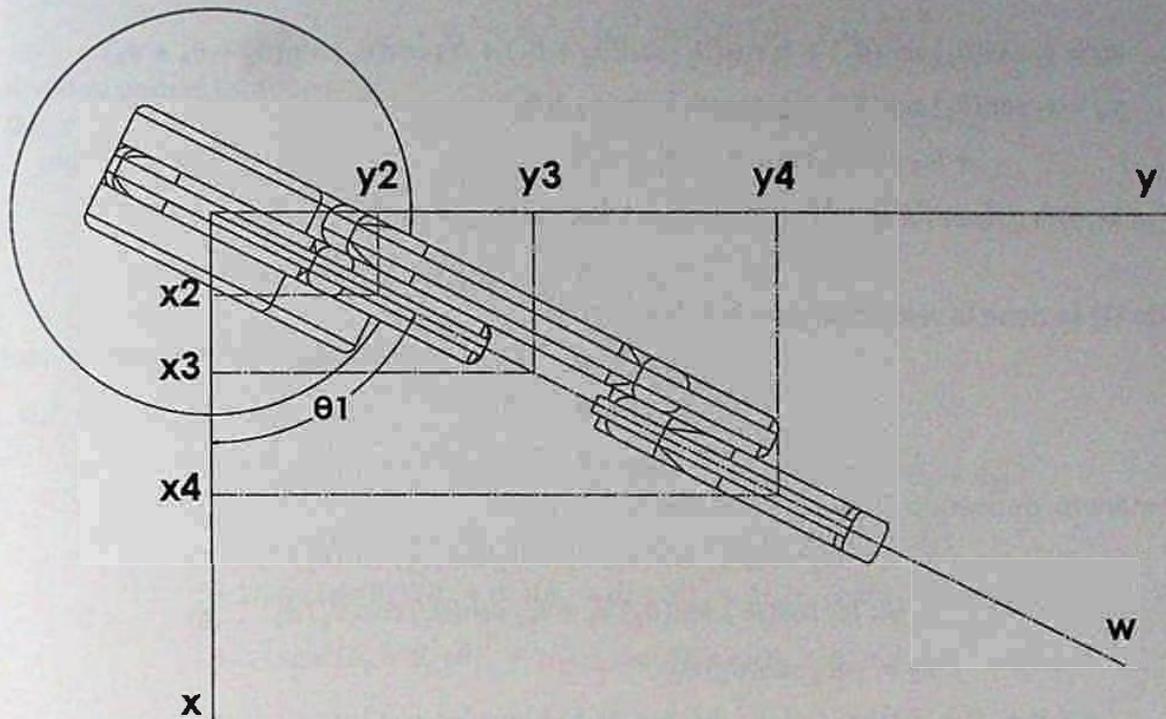
Fuente: Elaboración propia, 2018

Figura N°2. Vista del robot MBauEd en el plano “wz”



Fuente: Elaboración propia, 2018

Figura N°3. Vista del robot MBauEd en el plano "xy" y el eje auxiliar "w"



Fuente: Elaboración propia, 2018

Las figuras N°2 y N°3 muestran la disposición de los eslabones en los planos "xy" y "wz".

Por lo tanto, las coordenadas del centro de masa para el Eslabón N°1 según las figuras N°1, N°2 y N°3 son:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ y_1 &= 0 \\ z_1 &= z_1 \end{aligned} \quad (1)$$

De igual manera, los centros de masa del Eslabón N°2 son:

$$\begin{aligned} x_2 &= l_2 \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \\ y_2 &= l_2 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \\ z_2 &= z_1 + l_2 \cos(\theta_2) \end{aligned} \quad (2)$$

De forma análoga, los centros de masa para el Eslabón N°3 son:

$$\begin{aligned} x_3 &= l_2 \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) + l_3 \cos(\theta_1) \sin(\theta_2 + \theta_3) \\ y_3 &= l_2 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) + l_3 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2 + \theta_3) \\ z_3 &= z_1 + l_2 \cos(\theta_2) + l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) \end{aligned} \quad (3)$$

Por último, para el Eslabón N°4 las coordenadas son:

$$\begin{aligned} x_4 &= l_2 \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) + l_3 \cos(\theta_1) \sin(\theta_2 + \theta_3) + l_4 \cos(\theta_1) \sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \\ y_4 &= l_2 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) + l_3 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2 + \theta_3) \\ &\quad + l_4 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \\ z_4 &= z_1 + l_2 \cos(\theta_2) + l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) + l_4 \cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \end{aligned} \quad (4)$$

Derivando (1) se tiene la velocidad para el Eslabón N°1:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0 \\ \dot{y}_1 &= 0 \\ \dot{z}_1 &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

De igual manera, derivando (2) para el Eslabón N°2 se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= -l_2 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \dot{\theta}_1 + l_2 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \dot{\theta}_2 \\ \dot{y}_2 &= l_2 \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \dot{\theta}_1 + l_2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) \dot{\theta}_2 \\ \dot{z}_2 &= -l_2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (6)$$

Derivando (3) para el Eslabón N°3 se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= -l_2 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \dot{\theta}_1 + l_2 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \dot{\theta}_2 - l_3 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2 + \theta_3) \cdot \\ &\quad + l_3 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2 + \theta_3) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \\ \dot{y}_3 &= l_2 \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \dot{\theta}_1 + l_2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) \dot{\theta}_2 + l_3 \cos(\theta_1) \sin(\theta_2 + \theta_3) \cdot \\ &\quad + l_3 \sin(\theta_1) \cos(\theta_2 + \theta_3) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \\ \dot{z}_3 &= -l_2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2 - l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \end{aligned} \quad (7)$$

Por último, derivando (4) para el Eslabón N°4 se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 &= -l_2 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \dot{\theta}_1 + l_2 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \dot{\theta}_2 - l_3 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1 \\ &\quad + l_3 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2 + \theta_3) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) - l_4 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \dot{\theta}_1 \\ &\quad + l_4 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) \\ \dot{y}_4 &= l_2 \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \dot{\theta}_1 + l_2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) \dot{\theta}_2 + l_3 \cos(\theta_1) \sin(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1 \\ &\quad + l_3 \sin(\theta_1) \cos(\theta_2 + \theta_3) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + l_4 \cos(\theta_1) \sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \dot{\theta}_1 \\ &\quad + l_4 \sin(\theta_1) \cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) \\ \dot{z}_4 &= -l_2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2 - l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) - l_4 \sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) \end{aligned} \quad (8)$$

La velocidad al cuadrado de cada uno de los eslabones viene dada por la siguiente expresión:

$$v_i^2 = \dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2$$

Por lo tanto, la velocidad al cuadrado para el Eslabón N°1 se tiene:

$$v_1^2 = 0 \rightarrow \dot{x}_1 = 0; \dot{y}_1 = 0; \dot{z}_1 = 0 \quad (9)$$

La velocidad para el Eslabón N°2:

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2 = l_2^2 \sin^2(\theta_2) \dot{\theta}_{12}^2 + l_2^2 \dot{\theta}_{22}^2 \quad (10)$$

La velocidad para el Eslabón N°3:

$$\begin{aligned} v_{32} &= \dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 + \dot{z}_3^2 \\ &= l_2^2 \sin^2(\theta_2) \dot{\theta}_1^2 + 2l_2l_3 \sin(\theta_2) \sin(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1^2 + 2l_2l_3 \cos(\theta_3) \dot{\theta}_2(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \\ &\quad + l_3^2 \sin^2(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + l_3^2 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 \end{aligned} \quad (11)$$

De igual manera para el Eslabón N°4 se tiene:

$$\begin{aligned} v_4^2 &= \dot{x}_4^2 + \dot{y}_4^2 + \dot{z}_4^2 \\ &= l_2^2 \sin^2(\theta_2) \dot{\theta}_{12}^2 + l_{22}^2 \dot{\theta}_2^2 + l_3^2 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 + l_4^2 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4)^2 \\ &\quad + 2l_2l_3 \sin(\theta_2) \sin(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1^2 + 2l_2l_3 \cos(\theta_3) \dot{\theta}_2(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \\ &\quad + 2l_3l_4 \cos(\theta_4) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) + 2l_2l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4) \dot{\theta}_2(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) \\ &\quad + l_3^2 \sin^2(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1^2 + 2l_2l_4 \sin(\theta_2) \sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \dot{\theta}_1^2 \\ &\quad + 2l_3l_4 \sin(\theta_2 + \theta_3) \sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \dot{\theta}_1^2 + l_4^2 \sin^2(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \dot{\theta}_1^2 \end{aligned} \quad (12)$$

Determinación de la energía cinética de los eslabones

La energía cinética de cada uno de los eslabones viene dada por la siguiente expresión:

$$k_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \frac{1}{2} I_i \dot{\theta}_i^2$$

La energía cinética asociada al Eslabón N°1:

$$k_1 = \frac{1}{2} I_{1z} \dot{\theta}_1^2 \rightarrow v_i^2 = 0 \quad (13)$$

Para el Eslabón N°2, la energía cinética:

$$k_2 = \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \sin^2(\theta_2) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} I_{2z} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_{2x} \dot{\theta}_2^2 \quad (14)$$

De igual manera, la energía cinética asociada al Eslabón N°3 se denota como:

$$\begin{aligned} k_3 &= \frac{1}{2} m_3 l_2^2 \sin^2(\theta_2) \dot{\theta}_1^2 + m_3 l_2 l_3 \sin(\theta_2) \sin(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1^2 + m_3 l_2 l_3 \cos(\theta_3) \dot{\theta}_2(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \\ &\quad + \frac{1}{2} m_3 l_3^2 \sin^2(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_3 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 l_3^2 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 + \frac{1}{2} I_{3z} \dot{\theta}_1^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} I_{3x} (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 \end{aligned} \quad (15)$$

Por último, la energía cinética para el Eslabón N°4:

$$\begin{aligned}
 k_4 = & \frac{1}{2}m_4l_2^2 \sin^2(\theta_2) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_4l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}m_4l_3^2(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 + \frac{1}{2}m_4lc_4^2(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4)^2 \\
 & + m_4l_2l_3 \sin(\theta_2) \sin(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1^2 + m_4l_2l_3 \cos(\theta_3) \dot{\theta}_2(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \\
 & + m_4l_3lc_4 \cos(\theta_4) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) + m_4l_2lc_4 \cos(\theta_3 + \theta_4) \dot{\theta}_2(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) \quad (16) \\
 & + \frac{1}{2}m_4l_3^2 \sin^2(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1^2 + m_4l_2lc_4 \sin(\theta_2) \sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \dot{\theta}_1^2 \\
 & + m_4l_3lc_4 \sin(\theta_2 + \theta_3) \sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_4lc_4^2 \sin^2(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \dot{\theta}_1^2 \\
 & + \frac{1}{2}l_{4z}\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}l_{4x}(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4)^2
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la energía cinética total del sistema es:

$$k(\theta, \dot{\theta}) = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \quad (17)$$

Determinación de la energía potencial de los eslabones

La energía potencial de los eslabones viene dada por:

$$U_i = m_i g h_i$$

Por lo tanto, la energía potencial para el Eslabón N°1 será:

$$U_1 = 0 \rightarrow h_1 = 0 \quad (18)$$

Para el Eslabón N°2 se tiene:

$$U_2 = m_2 g l c_2 \cos(\theta_2) \quad (19)$$

De igual manera para el Eslabón N°3:

$$U_3 = m_3 g [l_2 \cos(\theta_2) + l c_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)] \quad (20)$$

Por último, la energía potencial asociada al Eslabón N°4 es:

$$U_4 = m_4 g [l_2 \cos(\theta_2) + l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) + l c_4 \cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)] \quad (21)$$

La energía potencial total del sistema se describe como:

$$U(\theta) = U_2 + U_3 + U_4 \quad (22)$$

Determinación de las ecuaciones de movimiento de Lagrange

El Lagrangiano de un robot manipulador de "n" g.d.l. se determina con la diferencia entre su energía cinética y su energía potencial:

$$L(\theta, \dot{\theta}) = k(\theta, \dot{\theta}) - U(\theta) \quad (23)$$

Reemplazando (17) y (22) en (23) se tiene el Lagrangiano del sistema:

$$\begin{aligned}
 L(\theta, \dot{\theta}) = & \frac{1}{2} I_{1z} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2 c_2^2 \sin^2(\theta_2) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2 c_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} I_{2z} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_{2x} \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 l_2^2 \sin^2(\theta_2) \dot{\theta}_1^2 \\
 & + m_3 l_2 l_3 \sin(\theta_2) \sin(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_{12} + m_3 l_2 l_3 \cos(\theta_3) \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \\
 & + \frac{1}{2} m_3 l_3^2 \sin^2(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_3 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 l_3^2 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 + \frac{1}{2} I_{3z} \dot{\theta}_1^2 \\
 & + \frac{1}{2} I_{3x} (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 + \frac{1}{2} m_4 l_2^2 \sin^2(\theta_2) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_4 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_4 l_3^2 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 \\
 & + \frac{1}{2} m_4 l_4^2 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4)^2 + m_4 l_2 l_3 \sin(\theta_2) \sin(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1^2 \\
 & + m_4 l_2 l_3 \cos(\theta_3) \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + m_4 l_3 l_4 \cos(\theta_4) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) \\
 & + m_4 l_2 l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4) \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) + \frac{1}{2} m_4 l_3^2 \sin^2(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1^2 \\
 & + m_4 l_2 l_4 \sin(\theta_2) \sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \dot{\theta}_1^2 + m_4 l_3 l_4 \sin(\theta_2 + \theta_3) \sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \dot{\theta}_1^2 \\
 & + \frac{1}{2} m_4 l_4^2 \sin^2(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_{1z} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_{4x} (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4)^2 - m_2 g l_2 \cos(\theta_2) \\
 & - m_3 g l_2 \cos(\theta_2) - m_3 g l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) - m_4 g l_2 \cos(\theta_2) - m_4 g l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) \\
 & - m_4 g l_4 \cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)
 \end{aligned} \tag{24}$$

Las ecuaciones de movimiento de Lagrange para un manipulador de "n" g.d.l. vienen dados por:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\theta, \dot{\theta})}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L(\theta, \dot{\theta})}{\partial \theta} = \tau \tag{25}$$

De forma equivalente para cada articulación:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\theta, \dot{\theta})}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L(\theta, \dot{\theta})}{\partial \theta_i} = \tau_i \quad i = 1, \dots, n \tag{26}$$

Siguiendo este procedimiento para el eslabón N°1 se tiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L(\theta, \dot{\theta})}{\partial \dot{\theta}_1} = & I_{1z} \dot{\theta}_1 + m_2 l_2 c_2^2 \sin^2(\theta_2) \dot{\theta}_1 + I_{2z} \dot{\theta}_1 + m_3 l_2^2 \sin^2(\theta_2) \dot{\theta}_1 + 2 m_3 l_2 l_3 \sin(\theta_2) \sin(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1 \\
 & + m_3 l_3^2 \sin^2(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1 + I_{3z} \dot{\theta}_1 + m_4 l_2^2 \sin^2(\theta_2) \dot{\theta}_1 \\
 & + 2 m_4 l_2 l_3 \sin(\theta_2) \sin(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1 + m_4 l_3^2 \sin^2(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1 \\
 & + 2 m_4 l_2 l_4 \sin(\theta_2) \sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \dot{\theta}_1 + 2 m_4 l_3 l_4 \sin(\theta_2 + \theta_3) \sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \dot{\theta}_1 \\
 & + m_4 l_4^2 \sin^2(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \dot{\theta}_1 + I_{4z} \dot{\theta}_1
 \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\theta, \dot{\theta})}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = & I_{12} \dot{\theta}_1 + m_2 l c_2^2 [2 \operatorname{sen}(\theta_2) \cos(\theta_2) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 + \operatorname{sen}^2(\theta_2) \dot{\theta}_1^2] + I_{22} \dot{\theta}_1 + I_{42} \dot{\theta}_1 \\
 & + m_3 l_2^2 [2 \operatorname{sen}(\theta_2) \cos(\theta_2) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 + \operatorname{sen}^2(\theta_2) \dot{\theta}_1^2] \\
 & + 2 m_3 l_2 l c_3 \{ [\cos(\theta_2) \dot{\theta}_2 \operatorname{sen}(\theta_2 + \theta_3) + \operatorname{sen}(\theta_2) \cos(\theta_2 + \theta_3) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)] \dot{\theta}_1 \\
 & + \operatorname{sen}(\theta_2) \operatorname{sen}(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1^2 \} \\
 & + m_3 l c_3^2 [2 \operatorname{sen}(\theta_2 + \theta_3) \cos(\theta_2 + \theta_3) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \dot{\theta}_1 + \operatorname{sen}^2(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1^2] + I_{32} \dot{\theta}_1 \\
 & + m_4 l_2^2 [2 \operatorname{sen}(\theta_2) \cos(\theta_2) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 + \operatorname{sen}^2(\theta_2) \dot{\theta}_1^2] \\
 & + 2 m_4 l_2 l_3 \{ [\cos(\theta_2) \dot{\theta}_2 \operatorname{sen}(\theta_2 + \theta_3) + \operatorname{sen}(\theta_2) \cos(\theta_2 + \theta_3) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)] \dot{\theta}_1 \\
 & + \operatorname{sen}(\theta_2) \operatorname{sen}(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1^2 \} \\
 & + m_4 l_3^2 [2 \operatorname{sen}(\theta_2 + \theta_3) \cos(\theta_2 + \theta_3) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \dot{\theta}_1 + \operatorname{sen}^2(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1^2] \\
 & + 2 m_4 l_2 l c_4 \{ [\cos(\theta_2) \dot{\theta}_2 \operatorname{sen}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \\
 & + \operatorname{sen}(\theta_2) \cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4)] \dot{\theta}_1 + \operatorname{sen}(\theta_2) \operatorname{sen}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \dot{\theta}_1^2 \} \\
 & + 2 m_4 l_3 l c_4 \{ [\cos(\theta_2 + \theta_3) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \operatorname{sen}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \\
 & + \operatorname{sen}(\theta_2 + \theta_3) \cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4)] \dot{\theta}_1 \\
 & + \operatorname{sen}(\theta_2 + \theta_3) \operatorname{sen}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \dot{\theta}_1^2 \} \\
 & + m_4 l c_4^2 [2 \operatorname{sen}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) \dot{\theta}_1 \\
 & + \operatorname{sen}^2(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \dot{\theta}_1^2]
 \end{aligned} \tag{28}$$

$$\frac{\partial L(\theta, \dot{\theta})}{\partial \dot{\theta}_1} = 0 \tag{29}$$

Las derivadas del Lagrangiano para el Eslabón N°2 son:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L(\theta, \dot{\theta})}{\partial \dot{\theta}_2} = & m_2 l c_2^2 \dot{\theta}_2 + I_{2x} \dot{\theta}_2 + m_3 l_2 l c_3 \cos(\theta_3) (2\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + m_3 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_3 l c_3^2 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \\
 & + I_{3x} (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + m_4 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_4 l_3^2 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + m_4 l c_4^2 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) \\
 & + m_4 l_2 l_3 \cos(\theta_3) (2\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + m_4 l_3 l c_4 \cos(\theta_4) (2\dot{\theta}_2 + 2\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) \\
 & + m_4 l_2 l c_4 \cos(\theta_3 + \theta_4) (2\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) + I_{4x} (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4)
 \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\theta, \dot{\theta})}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = & m_2 l c_2^2 \ddot{\theta}_2 + I_{2x} \ddot{\theta}_2 + m_3 l_2 l c_3 [-\operatorname{sen}(\theta_3) \dot{\theta}_3 (2\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + \cos(\theta_3) (2\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)] + m_3 l_2^2 \ddot{\theta}_2 \\
 & + m_3 l c_3^2 (\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3) + I_{3x} (\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3) + m_4 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_4 l_3^2 (\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3) + m_4 l c_4^2 (\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3 + \ddot{\theta}_4) \\
 & + m_4 l_2 l_3 [-\operatorname{sen}(\theta_3) \dot{\theta}_3 (2\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + \cos(\theta_3) (2\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)] \\
 & + m_4 l_3 l c_4 [-\operatorname{sen}(\theta_4) \dot{\theta}_4 (2\dot{\theta}_2 + 2\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) + \cos(\theta_4) (2\dot{\theta}_2 + 2\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4)] \\
 & + m_4 l_2 l c_4 [-\operatorname{sen}(\theta_3 + \theta_4) (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) (2\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) + \cos(\theta_3 + \theta_4) (2\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4)] \\
 & + I_{4x} (\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3 + \ddot{\theta}_4)
 \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L(\theta, \dot{\theta})}{\partial \theta_2} = & m_2 l_2 c_2^2 \sin(\theta_2) \cos(\theta_2) \dot{\theta}_1^2 + m_3 l_2 c_3^2 \sin(\theta_2) \cos(\theta_2) \dot{\theta}_1^2 \\
& + m_3 l_2 l_3 [\cos(\theta_2) \sin(\theta_2 + \theta_3) + \sin(\theta_2) \cos(\theta_2 + \theta_3)] \dot{\theta}_1^2 \\
& + m_3 l_3 c_3^2 \sin(\theta_2 + \theta_3) \cos(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1^2 + m_4 l_2^2 \sin(\theta_2) \cos(\theta_2) \dot{\theta}_1^2 \\
& + m_4 l_2 l_3 [\cos(\theta_2) \sin(\theta_2 + \theta_3) + \sin(\theta_2) \cos(\theta_2 + \theta_3)] \dot{\theta}_1^2 \\
& + m_4 l_3^2 \sin(\theta_2 + \theta_3) \cos(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1^2 \\
& + m_4 l_2 l_4 [\cos(\theta_2) \sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) + \sin(\theta_2) \cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)] \dot{\theta}_1^2 \\
& + m_4 l_3 l_4 [\cos(\theta_2 + \theta_3) \sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) + \sin(\theta_2 + \theta_3) \cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)] \dot{\theta}_1^2 \\
& + m_4 l_4 c_4^2 \sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \dot{\theta}_1^2 + m_2 g l_2 \sin(\theta_2) + m_3 g l_3 \sin(\theta_2) \\
& + m_3 g l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) + m_4 g l_2 \sin(\theta_2) + m_4 g l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) \\
& + m_4 g l_4 \sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)
\end{aligned} \tag{32}$$

Siguiendo el mismo procedimiento, las derivadas del Lagrangiano para el Eslabón N°3 son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L(\theta, \dot{\theta})}{\partial \theta_3} = & m_3 l_2 l_3 \cos(\theta_3) \dot{\theta}_2 + m_3 l_3 c_3^2 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + l_{3x} (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + m_4 l_3^2 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \\
& + m_4 l_4 c_4^2 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) + m_4 l_2 l_3 \cos(\theta_3) \dot{\theta}_2 + m_4 l_3 l_4 \cos(\theta_4) (2\dot{\theta}_2 + 2\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) \\
& + m_4 l_2 l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4) \dot{\theta}_2 + l_{4x} (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4)
\end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\theta, \dot{\theta})}{\partial \theta_3} \right) = & m_3 l_2 l_3 [-\sin(\theta_3) \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_2 + \cos(\theta_3) \ddot{\theta}_2] + m_3 l_3 c_3^2 (\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3) + l_{3x} (\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3) \\
& + m_4 l_3^2 (\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3) + m_4 l_4 c_4^2 (\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3 + \ddot{\theta}_4) + m_4 l_2 l_3 [-\sin(\theta_3) \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_2 + \cos(\theta_3) \ddot{\theta}_2] \\
& + m_4 l_3 l_4 [-\sin(\theta_4) \dot{\theta}_4 (2\dot{\theta}_2 + 2\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) + \cos(\theta_4) (2\ddot{\theta}_2 + 2\ddot{\theta}_3 + \ddot{\theta}_4)] \\
& + m_4 l_2 l_4 [-\sin(\theta_3 + \theta_4) (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) \dot{\theta}_2 + \cos(\theta_3 + \theta_4) \ddot{\theta}_2] + l_{4x} (\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3 + \ddot{\theta}_4)
\end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L(\theta, \dot{\theta})}{\partial \theta_3} = & m_3 l_2 l_3 \sin(\theta_2) \cos(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1^2 - m_3 l_2 l_3 \sin(\theta_3) (\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3) \\
& + m_3 l_3 c_3^2 \sin(\theta_2 + \theta_3) \cos(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1^2 + m_4 l_2 l_3 \sin(\theta_2) \cos(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1^2 \\
& - m_4 l_2 l_3 \sin(\theta_3) (\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3) - m_4 l_2 l_4 \sin(\theta_3 + \theta_4) (\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4) \\
& + m_4 l_3^2 \sin(\theta_2 + \theta_3) \cos(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1^2 + m_4 l_2 l_4 \sin(\theta_2) \cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \dot{\theta}_1^2 \\
& + m_4 l_3 l_4 [\cos(\theta_2 + \theta_3) \sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) + \sin(\theta_2 + \theta_3) \cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)] \dot{\theta}_1^2 \\
& + m_4 l_4 c_4^2 \sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \dot{\theta}_1^2 + m_3 g l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) \\
& + m_4 g l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) + m_4 g l_4 \sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)
\end{aligned} \tag{35}$$

Por último, las derivadas para el Eslabón N°4

$$\frac{\partial L(\theta, \dot{\theta})}{\partial \dot{\theta}_4} = m_4 l_3 l_4 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) + m_4 l_3 l_4 \cos(\theta_4) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + m_4 l_2 l_4 \cos(\theta_3 + \theta_4) \dot{\theta}_2 + I_{4x} (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) \quad (36)$$

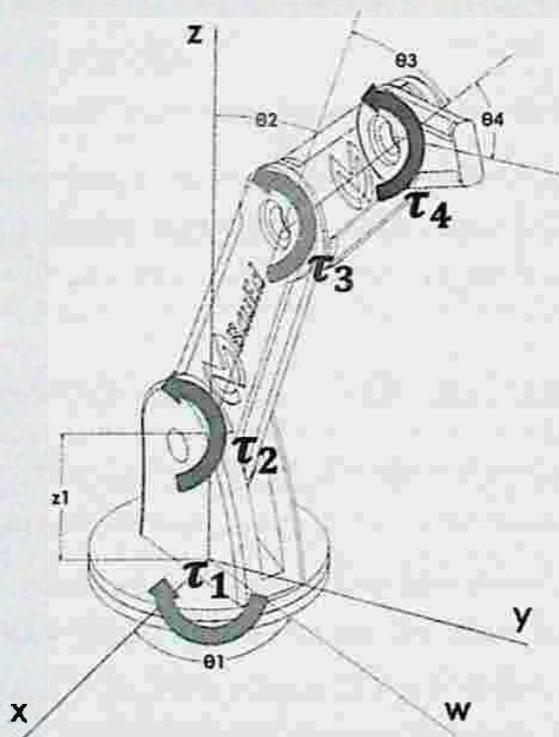
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\theta, \dot{\theta})}{\partial \dot{\theta}_4} \right) = m_4 l_3 l_4 (\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3 + \ddot{\theta}_4) + m_4 l_3 l_4 [-\sin(\theta_4) \dot{\theta}_4 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + \cos(\theta_4) (\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3)] + m_4 l_2 l_4 [-\sin(\theta_3 + \theta_4) (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) \dot{\theta}_2 + \cos(\theta_3 + \theta_4) \ddot{\theta}_2] + I_{4x} (\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3 + \ddot{\theta}_4) \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\theta, \dot{\theta})}{\partial \theta_4} = & -m_4 l_3 l_4 \sin(\theta_4) (\dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_3^2 + \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4) \\ & - m_4 l_2 l_4 \sin(\theta_3 + \theta_4) (\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4) + m_4 l_2 l_4 \sin(\theta_2) \cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \dot{\theta}_{12} \\ & + m_4 l_3 l_4 \sin(\theta_2 + \theta_3) \cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \dot{\theta}_1^2 \\ & + m_4 l_4^2 \sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \dot{\theta}_1^2 + m_4 g l_4 \sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \end{aligned} \quad (38)$$

Cálculo del par aplicado en las articulaciones del robot

La figura N°4 muestra los pares aplicados en cada una de las articulaciones del robot.

Figura N°4. Pares aplicados en las articulaciones del robot



Fuente: Elaboración propia, 2018

Por lo tanto, la ecuación (25) para cada una de las articulaciones y haciendo uso de las ecuaciones (27), (28) y (29) para τ_1 ; las ecuaciones (30), (31) y (32) para τ_2 ; las ecuaciones (33), (34) y (35) para τ_3 ; las ecuaciones (36), (37) y (38) para τ_4 ; puede ser expresada en su forma resumida como:

$$\tau_1 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\theta, \dot{\theta})}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L(\theta, \dot{\theta})}{\partial \theta_1} \quad (39)$$

$$\tau_2 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\theta, \dot{\theta})}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L(\theta, \dot{\theta})}{\partial \theta_2} \quad (40)$$

$$\tau_3 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\theta, \dot{\theta})}{\partial \dot{\theta}_3} \right) - \frac{\partial L(\theta, \dot{\theta})}{\partial \theta_3} \quad (41)$$

$$\tau_4 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\theta, \dot{\theta})}{\partial \dot{\theta}_4} \right) - \frac{\partial L(\theta, \dot{\theta})}{\partial \theta_4} \quad (42)$$

Considerando las expresiones (39), (40), (41) y (42) las ecuaciones de movimiento pueden ser descritas de la siguiente forma:

$$\tau = M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + g(\theta) \quad (43)$$

Donde:

$M(\theta)$: Matriz de inercias

$C(\theta, \dot{\theta})$: Matriz centrífuga y de coriolis

$g(\theta)$: Vector de pares gravitacionales

- **Matriz de inercia:** la matriz de inercia $M(\theta)$ juega un papel importante, tanto en el modelado dinámico como en el diseño de controladores para el robot, ya que se emplean algunas de sus propiedades para el estudio de estabilidad de dichos sistemas de control de robots. La matriz de inercia $M(\theta)$ es una matriz simétrica definida positiva de $n \times n$, cuyos elementos son funciones solamente de θ (Kelly y Victor, 2003).
- **Matriz centrífuga y de Coriolis:** la importancia de las propiedades de la matriz centrífuga y de Coriolis $C(\theta, \dot{\theta})$ se hace patente en el diseño de estabilidad de los sistemas de control de robots. La matriz centrífuga y de Coriolis $C(\theta, \dot{\theta})$ es una matriz de $n \times n$ cuyos elementos son funciones de θ y $\dot{\theta}$ (Kelly y Victor, 2003).
- **Vector de pares gravitacionales:** el vector de pares gravitacionales $g(\theta)$ está presente en robots que no han sido diseñados desde un punto de vista mecánico con compensación de pares de gravedad, sin contrapesos o resortes o para robots destinados a desplazarse fuera del plano horizontal. El vector de pares gravitacionales $g(\theta)$ de $n \times 1$ depende solo de las posiciones articulares θ (Kelly y Victor, 2003).

Por lo tanto, la Ecuación (43) puede ser expresada de la siguiente manera, tomando en cuenta cada uno de los componentes de la matriz de inercia, la matriz centrífuga y de coriolis y el vector de pares gravitacionales:

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}(\theta) & M_{12}(\theta) & M_{13}(\theta) & M_{14}(\theta) \\ M_{21}(\theta) & M_{22}(\theta) & M_{23}(\theta) & M_{24}(\theta) \\ M_{31}(\theta) & M_{32}(\theta) & M_{33}(\theta) & M_{34}(\theta) \\ M_{41}(\theta) & M_{42}(\theta) & M_{43}(\theta) & M_{44}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11}(\theta, \dot{\theta}) & C_{12}(\theta, \dot{\theta}) & C_{13}(\theta, \dot{\theta}) & C_{14}(\theta, \dot{\theta}) \\ C_{21}(\theta, \dot{\theta}) & C_{22}(\theta, \dot{\theta}) & C_{23}(\theta, \dot{\theta}) & C_{24}(\theta, \dot{\theta}) \\ C_{31}(\theta, \dot{\theta}) & C_{32}(\theta, \dot{\theta}) & C_{33}(\theta, \dot{\theta}) & C_{34}(\theta, \dot{\theta}) \\ C_{41}(\theta, \dot{\theta}) & C_{42}(\theta, \dot{\theta}) & C_{43}(\theta, \dot{\theta}) & C_{44}(\theta, \dot{\theta}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(\theta) \\ g_2(\theta) \\ g_3(\theta) \\ g_4(\theta) \end{bmatrix} \quad (44)$$

Donde los miembros de las matrices se calculan según las ecuaciones (39), (40), (41), (42).

Simulación del modelo dinámico

Para realizar la simulación del modelo matemático obtenido se empleará el programa Matlab-Simulink. Previo a este procedimiento se debe considerar que en la Ecuación (43) el valor de τ representa la salida obtenida y los valores $M(\theta)$, $\dot{\theta}$; $C(\theta, \dot{\theta})$ y $g(\theta)$ son las entradas requeridas, pero para el objetivo principal del documento se requiere que la entrada de datos sea τ y las salidas sean $M(\theta)$, $\dot{\theta}$; $C(\theta, \dot{\theta})$ y $g(\theta)$, es decir, determinar el comportamiento de los eslabones ($\ddot{\theta}$, $\dot{\theta}$ y θ) del robot frente a diversos pares aplicados τ en las articulaciones del mismo.

Realizando algunas operaciones matriciales con la Ecuación (44) se tiene:

$$\begin{bmatrix} M_{11}(\theta) & M_{12}(\theta) & M_{13}(\theta) & M_{14}(\theta) \\ M_{21}(\theta) & M_{22}(\theta) & M_{23}(\theta) & M_{24}(\theta) \\ M_{31}(\theta) & M_{32}(\theta) & M_{33}(\theta) & M_{34}(\theta) \\ M_{41}(\theta) & M_{42}(\theta) & M_{43}(\theta) & M_{44}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{11}(\theta, \dot{\theta}) & C_{12}(\theta, \dot{\theta}) & C_{13}(\theta, \dot{\theta}) & C_{14}(\theta, \dot{\theta}) \\ C_{21}(\theta, \dot{\theta}) & C_{22}(\theta, \dot{\theta}) & C_{23}(\theta, \dot{\theta}) & C_{24}(\theta, \dot{\theta}) \\ C_{31}(\theta, \dot{\theta}) & C_{32}(\theta, \dot{\theta}) & C_{33}(\theta, \dot{\theta}) & C_{34}(\theta, \dot{\theta}) \\ C_{41}(\theta, \dot{\theta}) & C_{42}(\theta, \dot{\theta}) & C_{43}(\theta, \dot{\theta}) & C_{44}(\theta, \dot{\theta}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_1(\theta) \\ g_2(\theta) \\ g_3(\theta) \\ g_4(\theta) \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la expresión para las aceleraciones articulares, expresado en su forma matricial corresponde a:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}(\theta) & M_{12}(\theta) & M_{13}(\theta) & M_{14}(\theta) \\ M_{21}(\theta) & M_{22}(\theta) & M_{23}(\theta) & M_{24}(\theta) \\ M_{31}(\theta) & M_{32}(\theta) & M_{33}(\theta) & M_{34}(\theta) \\ M_{41}(\theta) & M_{42}(\theta) & M_{43}(\theta) & M_{44}(\theta) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \end{bmatrix} \quad (45)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \tau_1 - C_{11}\dot{\theta}_1 - C_{12}\dot{\theta}_2 - C_{13}\dot{\theta}_3 - C_{14}\dot{\theta}_4 - g_1 \\ \Delta_3 &= \tau_2 - C_{21}\dot{\theta}_1 - C_{22}\dot{\theta}_2 - C_{23}\dot{\theta}_3 - C_{24}\dot{\theta}_4 - g_2 \\ \Delta_4 &= \tau_3 - C_{31}\dot{\theta}_1 - C_{32}\dot{\theta}_2 - C_{33}\dot{\theta}_3 - C_{34}\dot{\theta}_4 - g_3 \\ \Delta_5 &= \tau_4 - C_{41}\dot{\theta}_1 - C_{42}\dot{\theta}_2 - C_{43}\dot{\theta}_3 - C_{44}\dot{\theta}_4 - g_4 \end{aligned}$$

Se debe hacer hincapié en las ecuaciones (39), (40), (41) y (42) que describen el torque necesario para cada articulación; así como cada uno de los miembros de las matrices y vectores de las expresiones (44) y (45) están descritas en su forma abreviada para el presente artículo debido al grado de complejidad y extensión que estos presentan, pero que efectivamente se desarrollaron de forma completa obteniendo todas y cada una de estas expresiones y que las mismas fueron utilizadas en su integridad para la simulación en Matlab-Simulink.

Teniendo en cuenta esta aclaración y que ahora cuenta con el modelo dinámico del robot de 4GDL, se procederá a realizar las simulaciones correspondientes, el producto de simular dichas expresiones dará como resultado los valores de posición $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$, velocidad $(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3, \dot{\theta}_4)$ y aceleración $(\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2, \ddot{\theta}_3, \ddot{\theta}_4)$ de los eslabones del robot frente a diversos torques aplicados en las articulaciones del mismo. Pero para poder visualizar la trayectoria que sigue el extremo del robot es necesario emplear las ecuaciones de la cinemática directa, es decir, obtener las coordenadas (x, y, z) del efector final y que estas estén en función de $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$.

Según las figuras N°1, N°2 y N°3 se tiene:

$$\begin{aligned} x &= [l_2 \text{sen}(\theta_2) + l_3 \text{sen}(\theta_2 + \theta_3) + l_4 \text{sen}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)] \cos(\theta_1) \\ y &= [l_2 \text{sen}(\theta_2) + l_3 \text{sen}(\theta_2 + \theta_3) + l_4 \text{sen}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)] \text{sen}(\theta_1) \\ z &= z_1 + l_2 \cos(\theta_2) + l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) + l_4 \cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \end{aligned}$$

Las propiedades físicas de cada uno de los eslabones se muestran en la tabla N°1

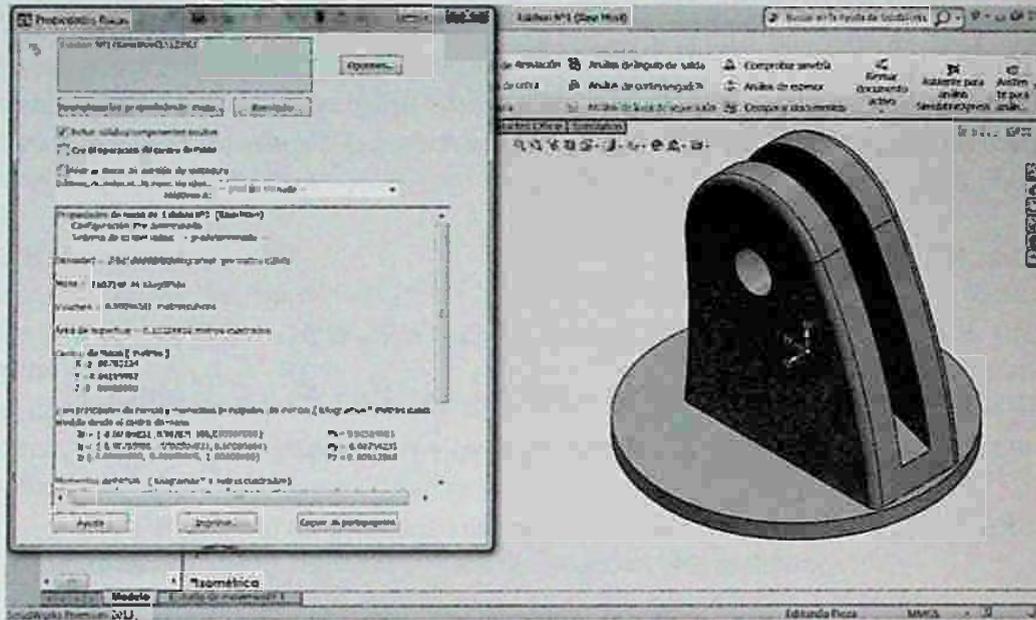
Tabla N°1. Propiedades físicas de los eslabones del robot MBauEd

Descripción	Magnitud
m_2 Masa del Eslabón N°2	1,327491 [Kg]
m_3 Masa del Eslabón N°3	0,942169 [Kg]
m_4 Masa del Eslabón N°4	0,361740 [Kg]
l_2 Longitud del Eslabón N°2	0,250 [m]
l_3 Longitud del Eslabón N°3	0,200 [m]
l_4 Longitud del Eslabón N°4	0,100 [m]
l_{c_2} Centro de masa del Eslabón N°2	0,118311 [m]
l_{c_3} Centro de masa del Eslabón N°3	0,093396 [m]
l_{c_4} Centro de masa del Eslabón N°4	0,028781 [m]
I_{1z} Momento de Inercia del Eslabón N°1	0,00589801 [kg*m ²]
I_{2x} Momento de Inercia del Eslabón N°2	0,01256115 [kg*m ²]
I_{2z} Momento de Inercia del Eslabón N°2	0,01176224 [kg*m ²]
I_{3x} Momento de Inercia del Eslabón N°3	0,01176224 [kg*m ²]
I_{3z} Momento de Inercia del Eslabón N°3	0,00560616 [kg*m ²]
I_{4x} Momento de Inercia del Eslabón N°4	0,00064435 [kg*m ²]
I_{4z} Momento de Inercia del Eslabón N°4	0,00052016 [kg*m ²]

Fuente: Elaboración propia, 2018

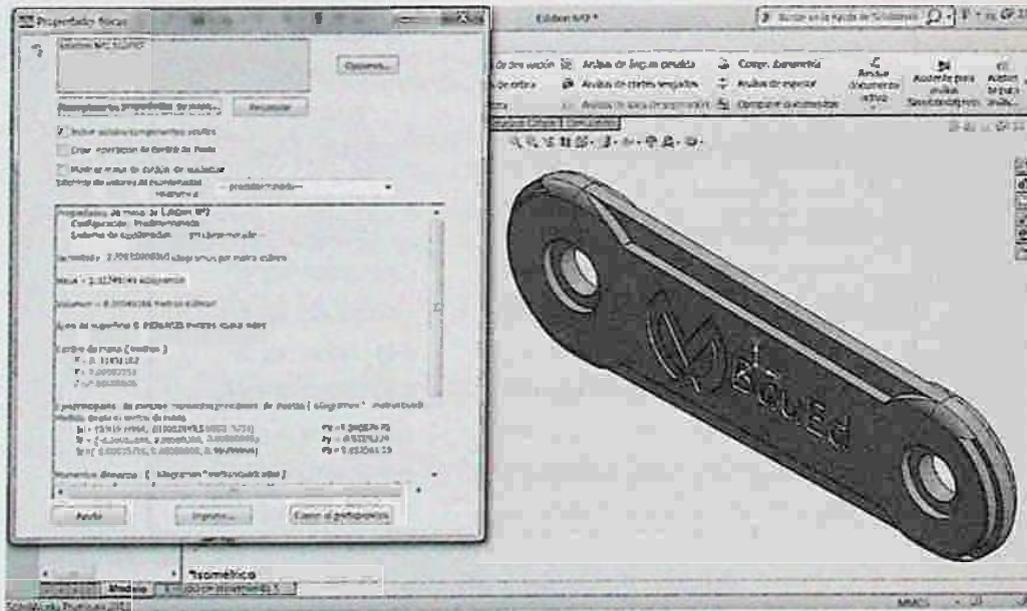
Los datos de la tabla N°1 se obtuvieron del diseño en SolidWorks para cada uno de los eslabones, los cuales se muestran en las figuras N°5, N°6, N°7 y N°8.

Figura N°5. Eslabón N°1 del robot MBauEd



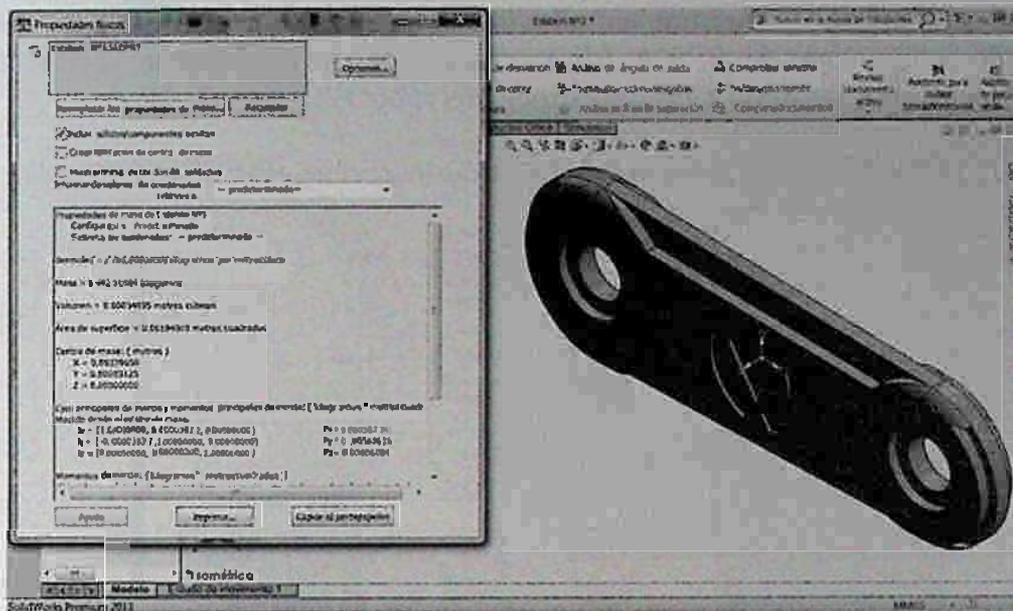
Fuente: Elaboración propia, 2018

Figura N°6. Eslabón N°2 del robot MBauEd



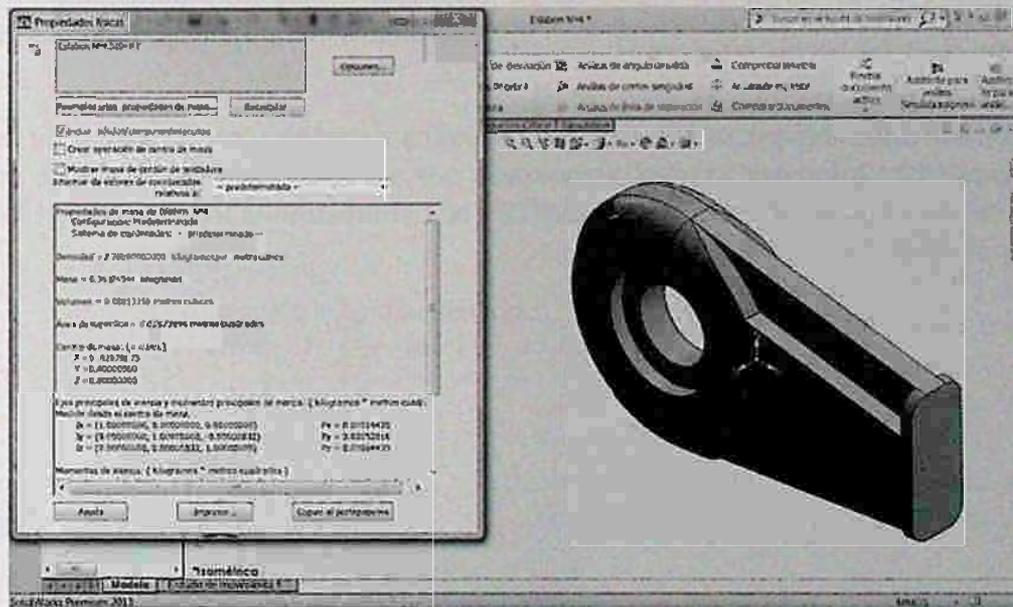
Fuente: Elaboración propia, 2018

Figura N°7. Eslabón N°3 del robot MBauEd



Fuente: Elaboración propia, 2018

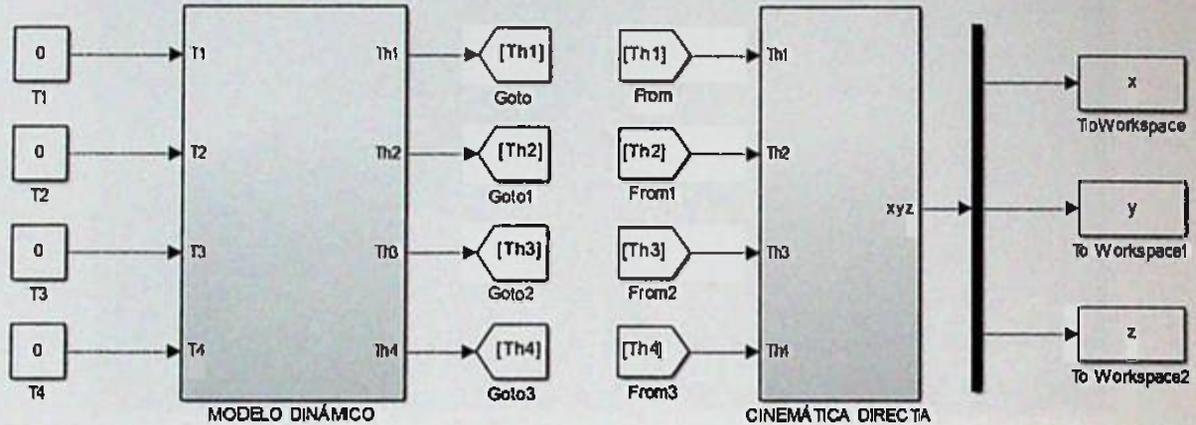
Figura N°8. Eslabón N°4 del robot MBauEd



Fuente: Elaboración propia, 2018

El diagrama de bloques diseñado en el programa Matlab-Simulink se muestra en la figura N°9; como se puede apreciar, se tienen dos bloques: el del modelo dinámico en sí y el que describe la cinemática directa del robot. El primero tiene como entradas los valores del par aplicado en las articulaciones y como resultado se los valores de $(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3, \dot{\theta}_4)$, los cuales ingresan al bloque de la cinemática directa para determinar las coordenadas (x,y,z) del extremo del robot MBauEd.

Figura N°9. Diagrama de bloques del modelo dinámico diseñado en Matlab-Simulink



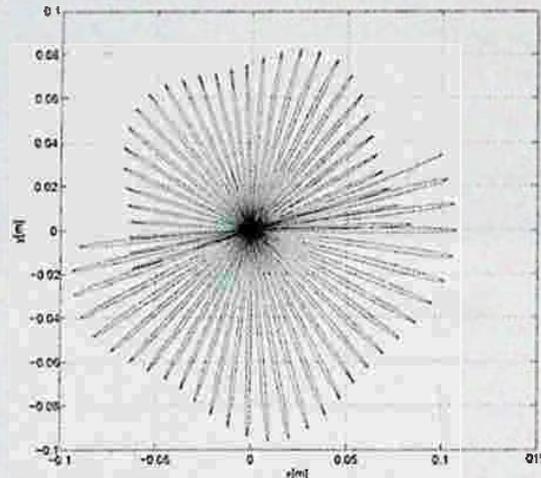
Fuente: Elaboración propia, 2018

Simulación N°1

Para la primera simulación se tomaron valores de $\tau_1=5$ [N.m], $\tau_2=9$ [N.m], $\tau_3=8$ [N.m] y $\tau_4=10$ [N.m] para un tiempo de simulación de $t=0.18$ seg. La gráfica obtenida claramente debe describir una esfera, cuyo eje de rotación no debe permanecer fijo debido a la inercia que generan los eslabones 2 y 3 (Nuruzzaman, 2005 y Gray,s/f).

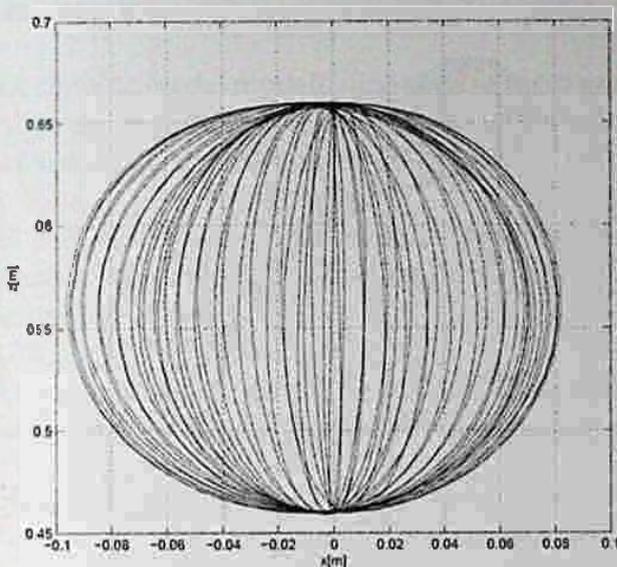
Los valores tomados para τ_2 y τ_3 ayudan a que la gráfica deseada tome la forma de una esfera el mayor tiempo posible antes que la inercia generada por sus eslabones desestabilice por completo la estructura del robot. Las figuras N°10, N°11, N°12 y N°13 muestran la trayectoria del robot para las condiciones indicadas.

Figura N°10. Trayectoria del robot MBauEd en el plano xy para: $\tau_1=5$ [N.m], $\tau_2=9$ [N.m], $\tau_3=8$ [N.m] y $\tau_4=10$ [N.m]



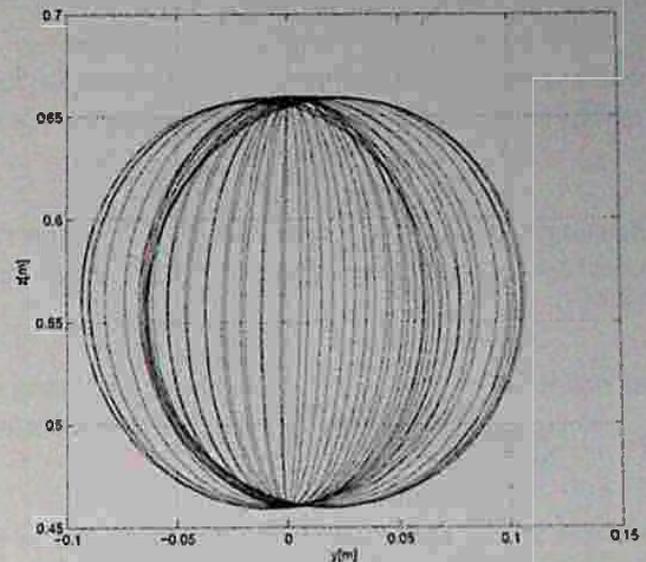
Fuente: Elaboración propia, 2018

Figura N°11. Trayectoria del robot MBauEd en el plano xz para: $\tau_1=5$ [N.m], $\tau_2=9$ [N.m], $\tau_3=8$ [N.m] y $\tau_4=10$ [N.m]



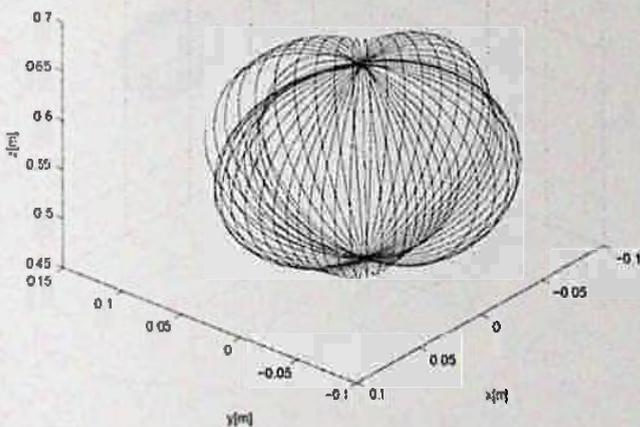
Fuente: Elaboración propia, 2018

Figura N°12. Trayectoria del robot MBauEd en el plano yz para: $\tau_1=5$ [N.m], $\tau_2=9$ [N.m], $\tau_3=8$ [N.m] y $\tau_4=10$ [N.m]



Fuente: Elaboración propia, 2018

Figura N°13. Trayectoria del robot MBauEd en el espacio para: $\tau_1=5$ [N.m], $\tau_2=9$ [N.m], $\tau_3=8$ [N.m] y $\tau_4=10$ [N.m]

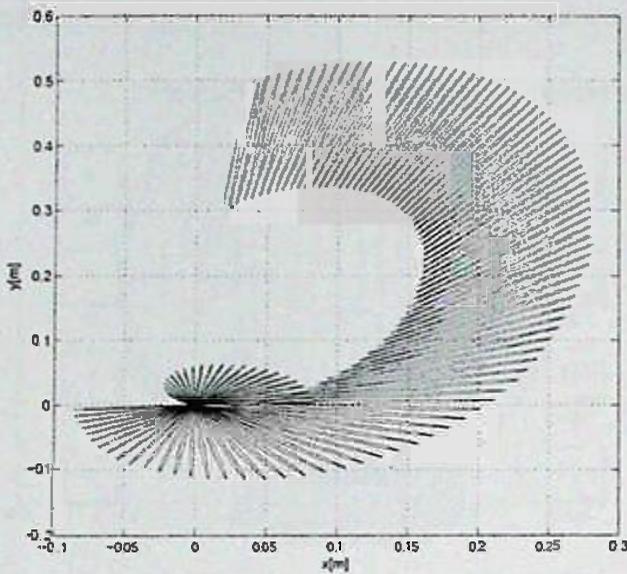


Fuente: Elaboración propia, 2018

Simulación N°2

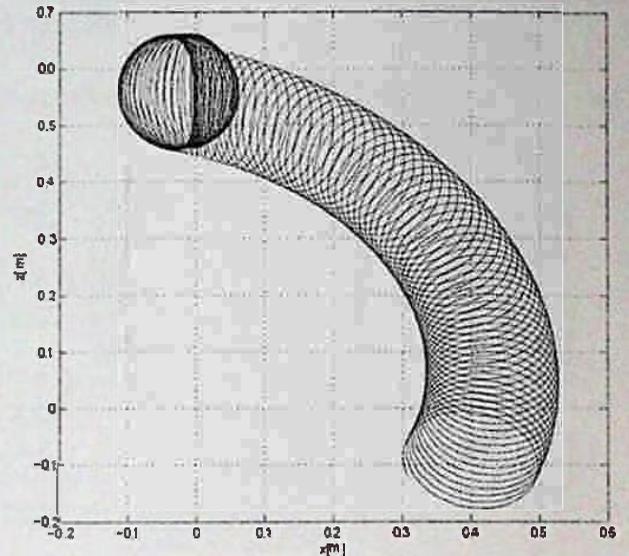
Para la segunda simulación se tomaron valores de $\tau_1=5$ [N.m], $\tau_2=9$ [N.m], $\tau_3=8$ [N.m] y $\tau_4=10$ [N.m] para un tiempo de simulación de $t=0.31$ seg. En este caso se deduce que –al inicio de la simulación– la trayectoria continúa siendo una esfera (cuyo eje de rotación no es fijo), pero la estructura se irá desestabilizando por la inercia que generan los eslabones 2 y 3 a medida que transcurre el tiempo, formando una especie de espiral que girará en torno a la base del robot (cuyo eje de rotación tampoco será fijo). Las figuras N°14, N°15, N°16 y N°17 muestran el comportamiento de los eslabones con un mayor tiempo de simulación (Nuruzzaman, 2005 y Gray s/f).

Figura N°14. Trayectoria del robot MBauEd en el plano xy para: $\tau_1=5$ [N.m], $\tau_2=8$ [N.m], $\tau_3=9$ [N.m] y $\tau_4=10$ [N.m]



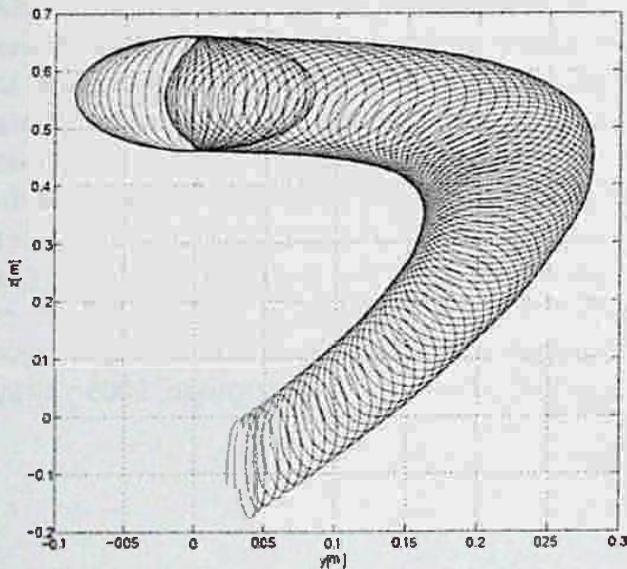
Fuente: Elaboración propia, 2018

Figura N°15. Trayectoria del robot MBauEd en el plano xz para: $\tau_1=5$ [N.m], $\tau_2=8$ [N.m], $\tau_3=9$ [N.m] y $\tau_4=10$ [N.m]



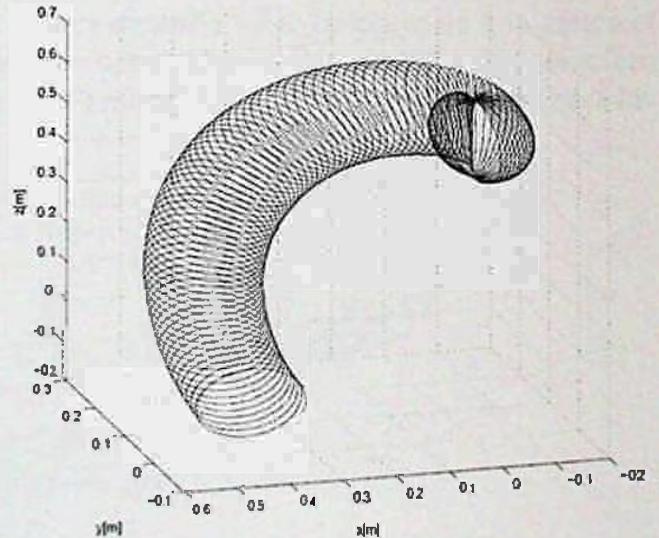
Fuente: Elaboración propia, 2018

Figura N°16. Trayectoria del robot MBauEd en el plano yz para: $\tau_1=5$ [N.m], $\tau_2=8$ [N.m], $\tau_3=9$ [N.m] y $\tau_4=10$ [N.m]



Fuente: Elaboración propia, 2018

Figura N°17. Trayectoria del robot MBauEd en el plano para: $\tau_1=5$ [N.m], $\tau_2=8$ [N.m], $\tau_3=9$ [N.m] y $\tau_4=10$ [N.m]



Fuente: Elaboración propia, 2018

CONCLUSIONES

El presente documento muestra paso a paso el procedimiento que se debe seguir para obtener el modelo dinámico de un robot de cuatro grados de libertad, utilizando las ecuaciones de movimiento de Lagrange.

La simulación del modelo dinámico se logró gracias al programa Matlab-Simulink, con el cual se pudo obtener las gráficas correspondientes de la trayectoria que sigue el efector final frente a diversos pares aplicados en las articulaciones del robot.

El modelo dinámico obtenido representa una herramienta muy importante, ya que el siguiente paso consiste en aplicar una ley de control a modelo matemático y así poder encomendar una tarea específica al robot.

Las características físicas de los eslabones como momentos de inercia, masas y centros de masa se obtuvieron gracias al diseño CAD utilizando el software SolidWorks.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1) Gray, M. A. (s.f.). Introduction to the Simulation of Dynamics Using Simulink. Boca Raton, Florida: Chapman & Hall/CRC Computational Science.
- 2) Kelly, R. y Victor, S. (2003). Control de Movimiento de Robots Manipuladores. Madrid, España: Pearson Educación.
- 3) Nuruzzaman, M. (2005). Modeling and Simulation in Simulink for Engineers and Scientists. Indiana, EE. UU.: AuthorHouse.

Bibliografía consultada

- 1) Perutka, K. (2011). MATLAB for Engineers-Applications in Control, Electrical Engineering, IT and Robotics. Rijeka, Croatia: InTech. <https://doi.org/10.5772/1533>
- 2) Systemes, D. (2018). Novedades Solidworks 2018. Massachusetts: SolidWorks Corporation.

Fuentes de financiamiento: Esta investigación fue financiada con fondos de los autores.

Declaración de conflicto de intereses: Los autores declaran que no tiene ningún conflicto de interés.

Copyright (c) 2018 Edson Gastón Montaña Bautista; Edgar Roberto Ramos Silvestre.



Este texto está protegido por una licencia [Creative Commons 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Usted es libre para Compartir —copiar y redistribuir el material en cualquier medio o formato— y Adaptar el documento —remezclar, transformar y crear a partir del material— para cualquier propósito, incluso para fines comerciales, siempre que cumpla la condición de:

Atribución: Usted debe dar crédito a la obra original de manera adecuada, proporcionar un enlace a la licencia, e indicar si se han realizado cambios. Puede hacerlo en cualquier forma razonable, pero no de forma tal que sugiera que tiene el apoyo del licenciante o lo recibe por el uso que hace de la obra.

[Resumendelicencia](#) - [Textocompletodelalicencia](#)